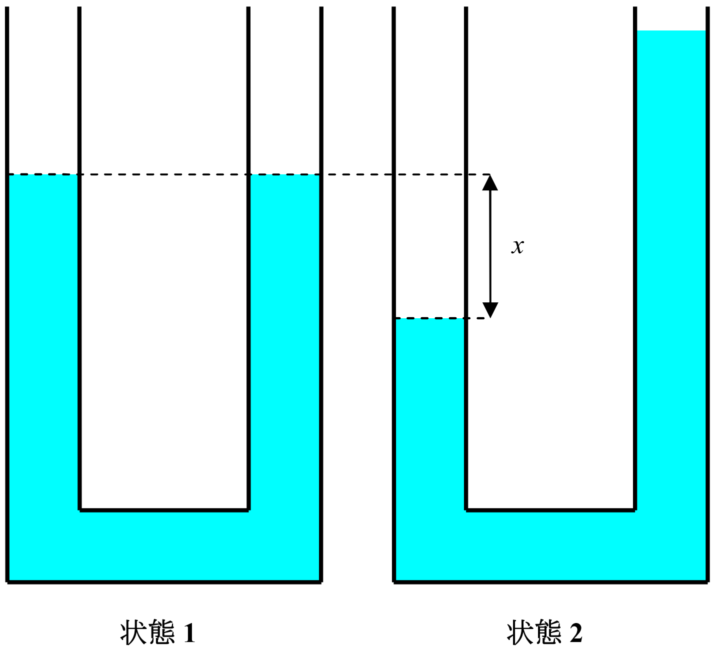
管内の液体の位置エネルギー変化

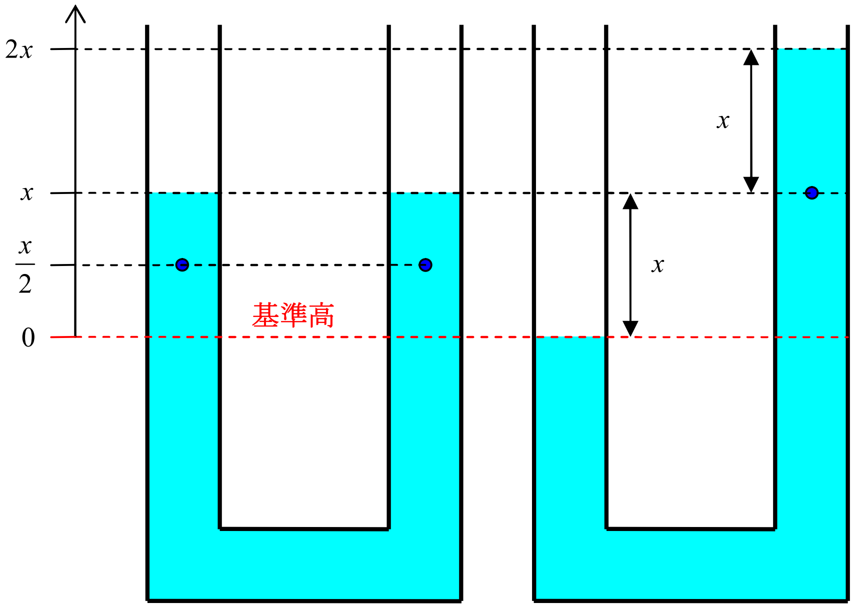
管内の液体の密度を ρ，管の断面積 S，重力加速度 g とする。

状態 1 の一方の液面が x だけ下がった状態を状態 2 とすると，

状態 1 から状態 2 に変化したときの液体の重力の位置エネルギー変化を求めよ。



解法 1



状態 1　　　　状態 2

状態 1 より x だけ下がった液面より下の部分の位置エネルギー変化は 0 だから，
その液面の高さを 0 とし，それより上の部分の位置エネルギー変化について考える。
状態 1 における基準高より上の部分の位置エネルギー

位置エネルギーを U_1 とすると，重力 ρSxg ，重心の高さ $\frac{x}{2}$ の 2 つの部分から成るから，

$$U_1 = \rho Sxg \cdot \frac{x}{2} \times 2 = \rho Sgx^2$$

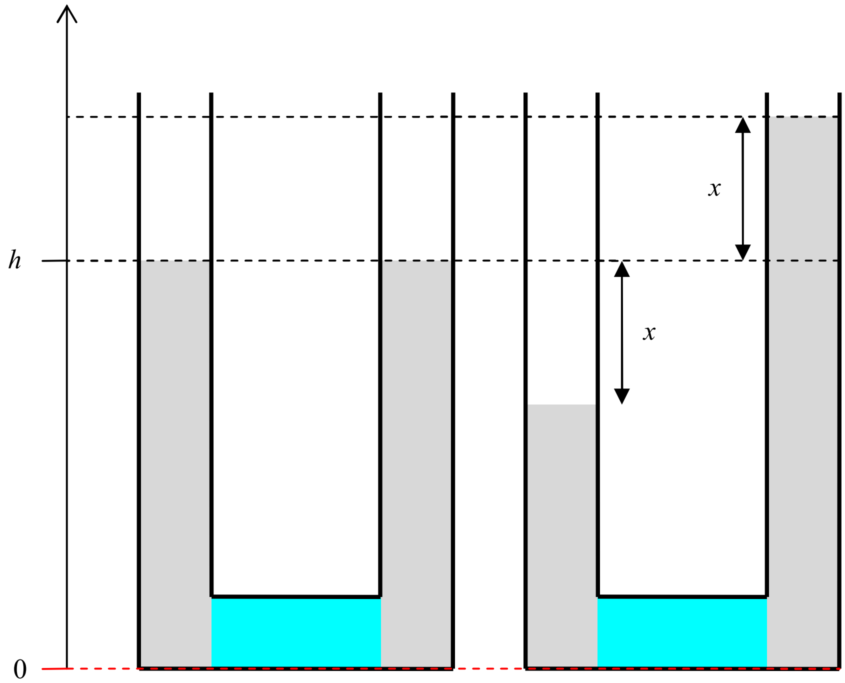
状態 2 における基準高より上の部分の位置エネルギー

位置エネルギーを U_2 とすると，重力 $2\rho Sxg$ ，重心の高さ x より，

$$U_2 = 2\rho Sxg \cdot x = 2\rho Sgx^2$$

よって，求める位置エネルギー変化は $U_2 - U_1 = \rho Sgx^2$

解法 2



状態 1 **状態 2**

高さの基準位置を上図のようにとり，灰色部分の位置エネルギーについて考えると，

解法 1 と同様にして，

状態 1 の位置エネルギー

$$2 \times \rho Shg \cdot \frac{h}{2} = \rho Sgh^2$$

状態 2 の位置エネルギー

$$\rho S(h-x)g \cdot \frac{h-x}{2} + \rho S(h+x)g \cdot \frac{h+x}{2} = \frac{\rho Sg}{2}\left\{(h-x)^2 + (h+x)^2\right\}$$
$$= \rho Sg\left(h^2 + x^2\right)$$

よって，求める位置エネルギー変化は $\rho Sg\left(h^2 + x^2\right) - \rho Sgh^2 = \rho Sgx^2$